曲面上の同相写像がすべて拡張する3次元多様体(低次元多様体の幾何構造と位相構造)

根上, 生也

数理解析研究所講究録
542巻 1985年 72-80

曲面上の同相写像がすべて拡張する3次元多様体

東工大・理　根上生せ (Seiya Negami)

0. はじめに

ここでは，空間X上の同相写像のisotopy類全体のつくる群を$\Lambda(X)$と書いて，homeotopy群と呼ぶ。曲面のhomeotopy群については古くから研究されており，最近でも多くの関心を集めているが，本稿では，曲面とそれが埋蔵されている3次元多様体のhomeotopy群の間の関係を考察する。

Xを空間Yの部分空間とするとき，XがYに<u>忠実に埋蔵されている</u>(faithfully embedded)とは，homeotopy群の間の単射準同形$\psi : \Lambda(X) \to \Lambda(Y)$でX上の各同相写像$h : X \to X$をその拡張$\hat{h} : Y \to Y$ ($\hat{h}|X = h$) に送るものが存在することと定義する。言い換えると，X上の同相写像がすべてY上の同相写像に拡張し，その拡張が写像の合成に関してうまくいっているとき，XはYに忠実に埋蔵されているという。

たとえば，$F^2\times I$ や $F^2\times S^1$ 内の fiber の曲面 F^2 は忠実に埋蔵されているよい例だが，これら以外の例がなかなか構成できない。そのかわりに，次の定理が証明されてしまった。

定理1. M^3 を irreducible, ∂-irreducible, orientable, compact な3次元多様体，F^2 $(\neq S^2)$ を M^3 内の orientable な閉曲面とする。もし F^2 が M^3 に忠実に埋蔵されているならば，次の(i),(ii)のいずれかが成立する。

$$\text{(i)}\quad M^3 = F^2\times I \supset F^2\times\{*\} = F^2$$

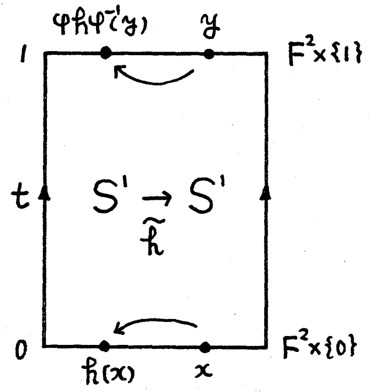
$$\text{(ii)}\quad M^3 = F^2\times S^1 \supset F^2\times\{*\} = F^2$$

以下，この定理の証明の概説をしていく。

1. S^1 上の F^2-bundle の場合

まず，M^3 が monodromy φ を持つ S^1 上の F^2-bundle $F^2\times_\varphi S^1$ で F^2 がその fiber の場合を考える。F^2 上の同相写像 $h: F^2\to F^2$ が M^3 上の同相写像 $\hat{h}: M^3\to M^3$ に拡張したとき，isotopic に変形して $\hat{h}$ を fiber-preserving にすることができる。M^3 を F^2 で切り開いて得られる $F^2\times I$ を考えると，$\hat{h}$ は h によって誘導された $F^2\times\{0\}$ と $F^2\times\{1\}$ 上の同相写像の間の isotopy を定義する。$\hat{h}$

がM^3のS^1方向を保つか逆にするかに応じて，そのisotopyは次のとおり。ただし，monodromyは$\varphi : F^2\times\{0\} \to F^2\times\{1\}$とする。

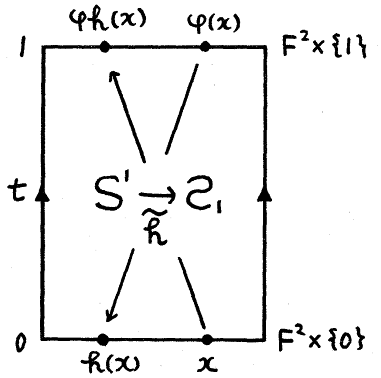


$H_t : F^2\times\{t\} \longrightarrow F^2\times\{t\}$

$H_0 : (x, 0) \longrightarrow (h(x), 0)$

$H_1 : (y, 1) \longrightarrow (\varphi h \varphi^{-1}(y), 1)$

$\therefore\ h \sim \varphi h \varphi^{-1}$



$H_t : F^2\times\{t\} \longrightarrow F^2\times\{1-t\}$

$H_0 : (x, 0) \longrightarrow (\varphi h(x), 1)$

$H_1 : (\underbrace{\varphi(x)}_{y}, 1) \longrightarrow (\underbrace{h(x)}_{h\varphi^{-1}(y)}, 0)$

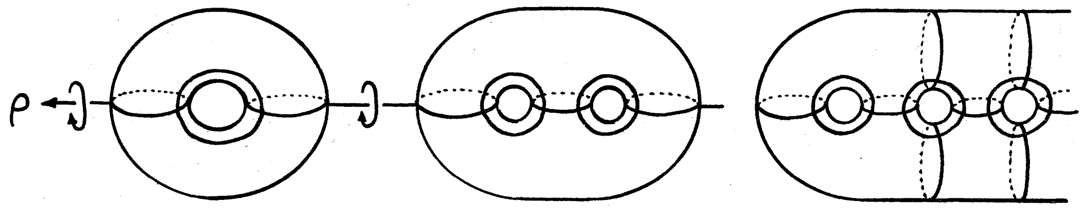
$\therefore\ \varphi h \sim h \varphi^{-1}$

これから，すべての同相写像$h : F^2 \to F^2$が拡張するならばそれらに対して$\varphi h \sim h\varphi^{\pm 1}$が成立しなければならない。特に$h$をsimple loop Cに沿ったDehn twist τ_Cとする。$\varphi\tau_C\varphi^{-1} = \tau_{\varphi(C)}{}^{\pm 1}$ (+ if φ : ori-pre ; − if φ : ori-rev) に注意すると，

$$\varphi\tau_C^2\varphi^{-1} = (\varphi\tau_C\varphi^{-1})^2 = (\tau_{\varphi(C)})^{\pm 2}$$
$$\sim \tau_C\varphi^{\pm 1}\tau_C\varphi^{-1} \sim \tau_C^2\varphi\varphi^{-1} = \tau_C^2$$
$$\therefore (\tau_{\varphi(C)})^{\pm 2} \sim \tau_C^2$$

ここで，Dehn twistの特殊な構造に着目すると，"−"の場合

は起らず，つまりφはorientation-preservingで，$\varphi(C)\sim C$となることがわかる。ただし，φはCの向きを逆にするかもしれない。そこで，下図のようなF^2上のsimple loopの組を考える。φは各loopを不変にするとしてよいので，genus $F^2 \geqq 3$のときは$\varphi\sim id$となり，genus $F^2 = 1, 2$のときは$\varphi\sim id$ or ρ（横軸回転）となることがわかる。



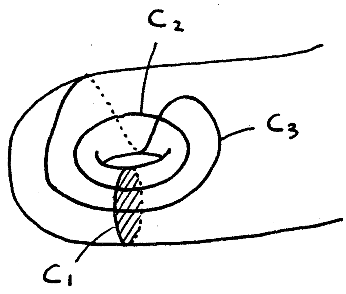
$\rho^2 = id$であるから，φはすべての$h : F^2 \to F^2$と可換になるので，上の議論は$\Lambda(F^2)$のcenterを決定している：

$$\text{center}(\Lambda(F^2)) \cong \begin{cases} 0 & (\text{genus } F^2 \geqq 3) \\ \mathbb{Z}_2 & (\text{genus } F^2 = 1, 2) \end{cases}$$

以上により，genus $F^2 \geqq 3$のときは$M^3 = F^2 \times S^1$となることがわかった。genus $F^2 = 1, 2$のとき，$\varphi\sim\rho$の場合を個別に調べると，monodromyのφ自身がid_{M^3}とisotopicなM^3上の同相写像に拡張する。実際，F^2をM^3のS^1方向に1周させれば，φが実現できる。このときは，F^2はM^3に忠実に埋蔵されていない。したがって，いずれの場合も$\varphi\sim id$となる。

2. Seifert多様体の場合

一般に，F^2がM^3に忠実に埋蔵されているならば，F^2はM^3でincompressibleになる。たとえば，F^2上のhandleを切るloop C_1にdisk D_1がはれていたとする。下図のように，互いに1点で交差し合うloop C_2, C_3を考える。この3つのloop C_1, C_2, C_3は互いにF^2上の同相写像でうつり合う。それらはM^3上の同相写像に拡張するので，C_2, C_3もそれぞれdisk D_2, D_3をboundする。ところが，C_iとC_j $(i \neq j)$は1点のみで交差しているので，D_iとD_jはF^2の同じ側にははれない。互いに異なる側にいるというD_1, D_2, D_3の三巴の状況は不可能だから，C_1にはdiskがはれないことになる。F^2をseparateするloopについても同様の三巴を考えれば，F^2にcompressionが存在しないことがわかる。



ところで，Seifert多様体の中のincompressibleな曲面はfiberの和集合になっている(vertical)か，すべてのfiberと横断的に交わっている(horizontal)。M^3をSeifert多様体として，F^2がverticalのときはtorusになる。F^2上のfiberは同相写像

$h: F^2 \to F^2$ によって任意のsimple loopにうつされるが，その拡張$\tilde{h}: M^3 \to M^3$ はもとのものとは異なるM^3の Seifert fibering を誘導する。これは，ほとんどのSeifert多様体に対して fibering の一意性が成立することに矛盾する。F^2がhorizontal のときは，M^3-F^2 にはI-bundleの構造が入る。F^2がM^3をseparate するときは省略するが，そうでないときはM^3-F^2 は$F^2 \times I$ に他ならない。この場合はM^3自身は$F^2 \times \{0\}$と$F^2 \times \{1\}$を貼り合せて得られるF^2-bundle になっており，前の場合に帰着される。

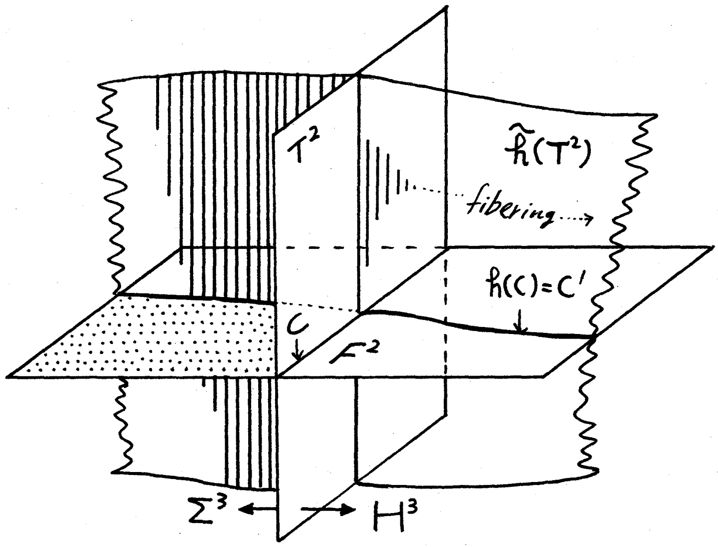
3. 一般の場合

$\partial M^3 \neq \phi$ のときは，M^3のdouble $D(M^3)$を考えればよいのでM^3はclosed であると仮定する。M^3はirreducibleで，incompressibleな曲面F^2を含むので，M^3はHaken多様体となる。すると，M^3はtorus分解によって極大なSeifert多様体Σ^3とsimpleな多様体H^3の２つの部分にわけられる。このとき，F^2とtorus分解のtorusの交わりは可能な限り減らしてあるとする。

まず，F^2がΣ^3とH^3の両方にまたがっている場合を考える。F^2は$\Sigma^3 \cap H^3$内のtorus T^2といくつかのsimple loop Cで交わっている。F^2上のsimple loop C'で，Cとの交差が絶対に解消ができないものを適当に選べば，同相写像$h: F^2 \to F^2$で$h(C) = C'$と

なるものが存在する。その拡張を$\widehat{h}: M^3 \to M^3$とすると，torus $\widehat{h}(T^2)$はisotopyでΣ^3の中に押し込むことはできない。$\widehat{h}(T^2) \cap H^3$はいくつかのannulusになるが，このannulusに沿ってΣ^3のfiberingを拡張していくことができるので，Σ^3の極大性に矛盾してしまう。したがって，$F^2 \subset \Sigma^3$ or H^3と仮定できる。

Johannsonは"On the mapping class group of simple 3-manifolds"（Lect. Notes in Math. 722, Springer）の中でsimpleな多様体のhomeotopy群は有限であることを示している。したがって，$|\Lambda(H^3)| < \infty$だが$|\Lambda(F^2)| = \infty$なので，$F^2 \subset H^3$のときはF^2は忠実に埋蔵されていない…この議論は正確ではないが，基本的なアイディアはこれで，$F^2 \subset H^3$の場合は除外される。



$F^2 \subset \Sigma^3$のとき，F^2がΣ^3の中でverticalの場合は2の場合と同様の矛盾が生じる。F^2がhorizontalの場合，もし$\partial\Sigma^3 \neq \phi$ならば，$F^2$をずっとなぜていくといずれ$\partial\Sigma^3$に到達し，$\partial F^2 \neq \phi$

となってしまう。今，F^2 は closed だから $\partial\Sigma^3=\phi$ となり，M^3 は Σ^3 と一致する（$M^3=\Sigma^3$，$H^3=\phi$）。このときも，M^3 自身が Seifert 多様体となり，２の場合に帰着される。

厳密ではないが，以上で定理１が証明された。■

4. おわりに

上の議論を整理していくと，M^3 が irreducible のときには，写像 $\psi:\Lambda(F^2)\to\Lambda(M^3)$ が単射準同形であるという条件はあまり本質的ではない。実際，genus $F^2\geqq 3$ のときには F^2 上の同相写像がすべて拡張するという仮定だけで同じ結論を得ることができる。"単射"については，次の命題が成立するので，議論にはほとんど影響がない。

命題２．M^3 を３次元多様体（特に何も仮定しない），F^2 をその中の閉曲面とする。もし F^2 上の同相写像 $h:F^2\to F^2$ で，$h\not\simeq id_{F^2}$ on F^2 だが拡張すると $\tilde{h}\sim id_{M^3}$ on M^3 となるものが存在すれば，$M^3=F^2\times_\varphi S^1$（$\varphi^n\sim h$）となる。特に，$M^3$ は必然的に closed かつ irreducible になってしまう。

ψが準同形であるという条件の方は，M^3がirreducibleであると仮定しないときに役目をはたす。F^2上の同相写像は適当に何個か合成するとid_{F^2}とisotopicになるが，もしM^3がirreducibleでないとincompressibleなS^2が障害となって，それらの拡張の合成がid_{M^3}とisotopicにならない場合が多い。したがって，ほとんどの場合にF^2がM^3に忠実に埋蔵されているならばM^3は必然的にirreducibleになってしまう。

以下，M^3がclosedのときにわかっていることを列挙しておく。

1. $\exists\psi : \Lambda(F^2) \to \Lambda(M^3)$: map $\iff$ $M^3 = F^2 \times_\varphi S^1 \# N^3$

   （すべてのhが拡張する.）　　$(\varphi \in \text{Center}\,\Lambda(F^2))$

2. $\exists\psi : \Lambda(F^2) \to \Lambda(M^3)$: homo $\iff$ $M^3 = F^2 \times_\varphi S^1$

   （合成に関してうまく拡張する.）　　or $= T^2 \times_\varphi S^1 \# N^3$

   $(\varphi \in \text{Center}\,\Lambda(F^2),\ T^2 = F^2)$

   torus

3. $\exists\psi : \Lambda(F^2) \to \Lambda(M^3)$: 1-1 homo

   （忠実に埋蔵されている.）　$\iff$ $M^3 = F^2 \times S^1$

   or $= T^2 \times_\varphi S^1 \# N^3$

   $(\varphi \sim id \text{ or } \rho,\ T^2 = F^2)$

以上